18/4/16

	Μηχάνημα 1	Μηχάνημα 2	Εργασία 1	Εργασία 2	Έσοδα
• Προϊόν 1	11	4	8	7	270
Προϊόν 2	7	6	5	8	200
Προϊόν 3	6	5	4	7	220
Προϊόν 4	5	4	6	4	180
Χρόνος	700	500	600	650	

$$\max z = 4x_1 + 10x_2 + 8x_3$$

$$5x_1 + 4x_2 + 4x_3 \leq 200$$

$$2x_1 + 5x_2 + 2x_3 \leq 160$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 50$$

$$2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 80$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

1) Ποιά η άριστη λύση του προβλήματος, ποιοί περιορισμοί είναι δεσμευτικοί;

2) Τι αξία έχει για την εταιρεία ένα επιπλέον m^3 ξυλείας;

3) -"- -"- -"- μια επιπλέον ώρα κοπής;

4) Αν η εταιρεία επιτρέπει να κατοχυρώσει ή υπερ. ώρα κοπής ή υπερ. ώρα συναρμολόγησης, τι έπρεπε να επιλέξει;

5) Θα αλλάξει η άριστη λύση αν η διαθέσιμη ποσότητα ξύλου ελαττωθεί από τα 160 στα $100 m^3$;
6) Σε ποιο ποσό θα έπρεπε να φτάνει το κέρδος από το 1ο προϊόν ώστε η εταιρεία να πάρει απόφαση να το κάνει;
7) Η εταιρεία σκέφτεται να ανεβάσει το κέρδος για το 3ο προϊόν από τις 8 στις 13 χμ. Το γεγονός αυτό θα επηρεάσει την άριστη λύση;

1) x_1 0
x_2 10 — 3, 4 δεσμευτικοί, περιθώριες 0
x_3 20
2) μηδέν
3) 2
4) το ίδιο είναι αφού η δυική είναι ίση με 2.
5) δεν θα αλλάξει τίποτα, ούτε τα έσοδά μας.
6) τουλάχιστον 6.
7) δεν θα αλλάξει, μόνο η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης κατά 100.

•	1ο Ορυχείο	2ο Ορυχείο	3ο Ορυχείο	4ο Ορυχείο
Νικέλιο	6%	3%	2%	1%
Άνθρακας	3%	2%	5%	6%
Μαγγάνιο	8%	3%	2%	1%
Κόστος	12	10	8	6

Το τελικό ταμπλό:

B	C_B	β	8 P_1	10 P_2	12 P_3	14 P_4	0 P_5	0 P_6	-M P_7	-M P_8	-M P_9
P_6	0	0,25									
P_4	14	12,5									
P_1	8	25									
P_2	10	62,5									
	z	1000	0	0	0	0	400	0	-400 +M	200 +M	16 +M

*(Να εξεταστεί στο LINDO ανάλυση ευαισθησίας)
*(x_5, x_6 περιθώριες, x_7, x_8, x_9 τεχνητές μεταβλητές)

x_i τόνοι σιδηρομεταλλεύματος στην παραγγελία που προέρχεται από το ορυχείο $i = 1,2,3,4$
Από κάθε τόνο εισπράττει 20 χμ.

$\max\{(20-12)x_1 + (20-10)x_2 + (20-8)x_3 + (20-6)x_4\}$

$0{,}06x_1 + 0{,}03x_2 + 0{,}02x_3 + 0{,}01x_4 \geq 3{,}5$ (νικέλιο)

$0{,}03x_1 + 0{,}02x_2 + 0{,}05x_3 + 0{,}06x_4 \leq 3$ (άνθρακας)

$0{,}08x_1 + 0{,}03x_2 + 0{,}02x_3 + 0{,}01x_4 = 4$ (μαγγάνιο)

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 100$ (μέγεθος παραγγελίας)

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$

Για το δυϊκό έχουμε:

min $3{,}5w_1 + 3w_2 + 4w_3 + 100w_4$

$0{,}06w_1 + 0{,}03w_2 + 0{,}08w_3 + w_4 \geq 8$

$0{,}03w_1 + 0{,}02w_2 + 0{,}03w_3 + w_4 \geq 10$

$0{,}02w_1 + 0{,}05w_2 + 0{,}02w_3 + w_4 \geq 12$

$0{,}01w_1 + 0{,}06w_2 + 0{,}01w_3 + w_4 \geq 14$

$w_1 \leq 0,\ w_2 \geq 0,\ w_3, w_4 \in \mathbb{R}$

$w_1 = (-400 + M) + (-M) = -400$ κάτω από 7

$w_2 = 0$ κάτω από 6

$w_3 = (200+M)+(-M)=200$ πάνω από 8

$w_4 = (16+M)+(-M)=16$ πάνω από 2

• $\max\ 300x_1 + 520x_2$ (3.17 από βιβλίο)

$x_1 + x_2 \leq 410$ (έκταση)

$105x_1 + 210x_2 \leq 52500$ (προϋπολογισμός)

$x_2 \leq 100$ (ρύζι)

$x_1, x_2 \geq 0$

x_1 καλαμπόκι

x_2 ρύζι

- η αξία ευκαιρίας 30 επί μας λέει 100, δεν δεχόμαστε
- μπορούν να πάρουν δάνειο
- η μείωση δεν επηρεάζεται, οπότε πρέπει να γραφτεί το πρόβλημα.

•

	προϊόν A	προϊόν B	Διαθ.	*(για την
κατασκευή	0,75	0,5	160	κατασκευή
συσκευασία	1,5	0,85	320	ενός τεμ. A
πρώτη ύλη	2	1	400	0,75 ώρες)
τιμή πώλησης	15	8		

Ορίζουμε P_1, P_2 αριθμό προϊόντων τύπου A, B αντίστοιχα

ot ώρες υπερωρίας

rm μονάδες πρώτης ύλης

a1, a2 ποσό για την διαφήμιση των προϊόντων A, B

$\max \ 15P_1 + 8P_2 - 6ot - 1{,}5\, rm - a_1 - a_2$

$P_1 \le 50 + 10a_1$ (ζήτηση A)

$P_2 \le 60 + 15a_2$ (ζήτηση B)

$0{,}75P_1 + 0{,}5P_2 \le 160 + ot$ (ώρες κατ)

(πρώτη ύλη) $2P_1 + P_2 \le rm$ — 4.40 αρ. εργατών επί τις ώρες που δουλεύουν

(διαθ. πρ. ύλη) $rm \le 400$

$a_1 + a_2 \le 100$ (διαφήμιση)

$1{,}5P_1 + 0{,}85P_2 \le 320$ (χρόνος επεξ. στη μηχανή)

$P_1, P_2, ot, rm, a_1, a_2 \ge 0$

• Να δειχθεί ότι για να υπάρχουν περισσότερες από μία άριστες λύσεις, πρέπει:

α) να υπάρχει εκφυλισμένη άριστη λύση.

β) $z_j - c_j = 0$ για μια τουλάχιστον στήλη P_j που δεν είναι βασική στη βάση που δίνει την άριστη λύση.

Ας υποθέσουμε ότι $\underline{x}_0 = (x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{m0}, 0, \ldots, 0)'$ $x_{i0} \ge 0$ άριστη λύση

$$\sum_{i=1}^{m} x_{i0} \underline{P}_i = \underline{b} \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{i0} c_i = z_0 \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \underline{P}_i = \underline{P}_j \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} c_i = z_j \quad (4)$$

(1) − θ(3)
$$\sum_{i=1}^{m} (x_{i0} - \theta x_{ij}) \underline{P}_i + \theta \underline{P}_j = \underline{b}$$

(2) − θ(4)
$$\sum_{i=1}^{m} (x_{i0} - \theta x_{ij}) c_i + \theta c_j = z_0 - \theta(z_j - c_j)$$

$x(\theta) = (x_{10} - \theta x_{1j}, x_{20} - \theta x_{2j}, \ldots, x_{m0} - \theta x_{mj}, 0, \ldots, 0, \ldots 0)'$

$z\, x(\theta) = z_0 - \theta(z_j - c_j)$.

$\theta_0 = \min\{ \frac{x_{i0}}{x_{ij}}, x_{ij} > 0 \}$.

• Να αποδειχθεί ότι εάν ένα διάνυσμα βγει απ' τη βάση σε κάποια επανάληψη της μεθόδου Simplex δεν μπορεί να ξαναμπεί στη βάση στο επόμενο βήμα.

Έστω στη k-επανάληψη $\underline{P_1}, \underline{P_2}, \ldots, \underline{P_m}$ βάση

λύση $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_m)'$

ικανοποιούνται οι περιορισμοί $x_1\underline{P_1} + x_2\underline{P_2} + \ldots + x_m\underline{P_m} = \underline{b}$

Επιλέγουμε να μπει στη βάση το $\underline{P_{m+1}}$ $z_{m+1} - c_{m+1} < 0$

$z_{m+1} = x_{1m+1}c_1 + x_{2m+1}c_2 + \ldots + x_{mm+1}c_m$ και έστω ότι "βγαίνει" το $\underline{P_1}$.

$x_{1m+1}\underline{P_1} + x_{2m+1}\underline{P_2} + \ldots + x_{mm+1}\underline{P_m} = \underline{P_{m+1}}$

Λύνω ως προς $\underline{P_1}$ $(x_{1m+1} > 0)$

$$\underline{P_1} = -\frac{x_{2m+1}}{x_{1m+1}}\underline{P_2} - \ldots - \frac{x_{mm+1}}{x_{1m+1}}\underline{P_m} + \frac{1}{x_{1m+1}}\underline{P_{m+1}}$$

$$z_1 = -\frac{x_{2m+1}}{x_{1m+1}}c_2 - \ldots - \frac{x_{mm+1}}{x_{1m+1}}c_m + \frac{c_{m+1}}{x_{1m+1}}$$

$$= -\frac{1}{x_{1m+1}}(z_{m+1} - c_1 x_{1m+1} - c_{m+1})$$

$$= -\frac{1}{x_{1m+1}}(z_{m+1} - c_{m+1}) + c_1$$

$$z_1 - c_1 = \underbrace{-\underbrace{\frac{1}{x_{1m+1}}}_{<0}\underbrace{(z_{m+1} - c_{m+1})}_{<0}}_{>0}$$

άρα δεν μπορεί να ξαναμπεί στην αμέσως επόμενη γιατί είναι θετικό.

<u>Πρόβλημα Μεταφοράς</u>

Έστω m σταθμοί παραγωγής $A_1, A_2, \dots, A_m$ οι οποίοι μπορούν να παράγουν ποσότητες προϊόντος $a_1, a_2, \dots, a_m$, n σταθμοί προορισμού $B_1, B_2, \dots, B_n$ και $b_1, b_2, \dots, b_n$ ζήτηση

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = S$$ (συνολική ποσ. παραγωγής = συνολ. ζήτηση)

Ορίζουμε c_{ij} το κόστος μεταφοράς μιας μονάδας προϊόντος από το σταθμό i στο σταθμό j. Ψάχνω x_{ij} ποσότητα προϊόντος που μεταφέρονται από το σταθμό i στο σταθμό j.

	B_1	B_2	...	B_n	
A_1	x_{11} c_{11}	x_{12} c_{12}		x_{1n} c_{1n}	a_1
A_2	x_{21} c_{21}	x_{22} c_{22}		x_{2n} c_{2n}	a_2
$\vdots$					
A_m	x_{m1} c_{m1}	x_{m2} c_{m2}		x_{mn} c_{mn}	a_m
	b_1	b_2		b_n	S

Μετατροπή του προβλήματος σε π.γ.π.

$$\min \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad i = 1, \dots, m$$ (ότι θα στείλω από το σταθμό i όσο η παραγωγή)

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad j = 1, \dots, n$$ (όσο θέλει)

$$x_{ij} \geq 0$$

$$x_{11}+x_{12}+\dots+x_{1n} = a_1$$

$$x_{21}+x_{22}+\dots+x_{2n} = a_2$$

$$\vdots$$

$$x_{m1}+x_{m2}+\dots+x_{mn} = a_m$$

(για την παραγωγή)

$$\begin{array}{llll} x_{11} & + x_{21} & + x_{m1} & = b_1 \\ + x_{12} & + x_{22} & + x_{m2} & = b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ x_{1n} & + x_{2n} & + x_{mn} & = b_n \end{array}$$

(για την ζήτηση)

Δηλαδή:

min $\underset{\sim}{c}'x$

$\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{x} = b$

$$A = \begin{pmatrix} \underline{1}' & \underline{0}' & \dots & \underline{0}' \\ \underline{0}' & \underline{1}' & \dots & \underline{0}' \\ \underline{0}' & \underline{0} & \dots & \underline{1}' \\ \underline{I} & \underline{I} & \dots & \underline{I} \end{pmatrix}$$

μοναδιαίος

$$\underset{\sim}{x} = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ \vdots \\ x_{1n} \\ \vdots \\ x_{m1} \\ \vdots \\ x_{mn} \end{pmatrix} \quad \underset{\sim}{c} = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{12} \\ \vdots \\ c_{1n} \\ \vdots \\ c_{m1} \\ \vdots \\ c_{mn} \end{pmatrix} \quad \underset{\sim}{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} a_i$$

$$\|$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Αν $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$ (μεταφορά > ζήτηση) προσθέτω εικονικούς σταθμούς προορισμού.

$b_{n+1} = \sum a_i - \sum b_j$

Scanned by CamScanner

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΣΕ ΟΛΗ ΤΗΝ ΥΛΗ.

1. Ένα αεροπλάνο έχει τρία τμήματα για τη μεταφορά φορτίου μπροστά, στο κέντρο και στην ουρά. Αυτά τα τμήματα έχουν τους ακόλουθους περιορισμούς ως προς το βάρος και τον όγκο του μεταφερόμενου φορτίου:

ΤΜΗΜΑ	ΒΑΡΟΣ (ΤΟΝΟΙ)	ΧΩΡΗΤΙΚΟΤΗΤΑ (M^3)
μπροστά	10	6800
κέντρο	16	8700
ουρά	8	5300

Επιπλέον ποσοστό του βάρους πρέπει να είναι το ίδιο στα τρία τμήματα για να διατηρείται η ισορροπία του αεροπλάνου. Τα παρακάτω φορτία πρέπει να μεταφερθούν στην επόμενη πτήση.

ΦΟΡΤΙΟ	ΒΑΡΟΣ (ΤΟΝΟΙ)	ΟΓΚΟΣ (M^3)	ΚΕΡΔΟΣ (€/ΤΟΝΟ)
C1	18	480	310
C2	15	650	380
C3	23	580	350
C4	12	390	285

Να διατυπωθεί το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού (π.γ.π) για τη φόρτωση του αεροπλάνου που μεγιστοποιεί το κέρδος της πτήσης.

2. Ο υπεύθυνος της επιτροπής αγώνα κατά της ρύπανσης μιας λίμνης έχει για κύριο έργο του τον έλεγχο του περιορισμού των τοξικών ουσιών που ρυπαίνουν τη λίμνη, στα ανεκτά όρια που προβλέπει ο νομοθέτης. Τρεις βιομηχανικές μονάδες πετούν τα απόβλητά τους στη λίμνη. Αυτά τα απόβλητα περιέχουν χημικές ουσίες ιδιαίτερα επικίνδυνες, όπως άλατα μόλυβδου (Pb), υδράργυρου (Hg) και μαγγανίου (Mn). Για τον περιορισμό της ρύπανσης, στα ανεκτά επίπεδα, διατίθενται δύο είδη προϊόντων (ακίνδυνα για την υγεία), το ένα βασισμένο σε θειικά άλατα, το δεύτερο βασισμένο σε νιτρικά άλατα. Τα προϊόντα αυτά αντιδρούν με τις παραπάνω τοξικές ουσίες παράγοντας τελείως ακίνδυνα ιζήματα. Το πρόβλημα που θέτει η επιτροπή αγώνα, επικεντρώνεται στον υπολογισμό εκείνου του συνδυασμού θειικών και νιτρικών αλάτων που ελαχιστοποιεί το κόστος προστασίας ενώ παράλληλα, επιτρέπει την ικανοποίηση των οικολογικών περιορισμών. Ο υπεύθυνος της επιτροπής που αντιμετωπίζει το πρόβλημα διαθέτει τα εξής παρακάτω στοιχεία:

α) Την ποσότητα αποβλήτων και την περιεκτικότητά τους σε τοξικές ουσίες για κάθε βιομηχανία που δίνονται στον πίνακα

	Όγκος και περιεκτικότητα αποβλήτων			
	Όγκος Αποβλήτων (m^3)	*Συγκέντρωση (g/m^3)*		
Βιομηχανική Μονάδα		Pb	Hg	*Mn*
1	1000	1.00	2.50	*0.70*
2	3000	0.50	0.50	*1.00*
3	1200	1.25	1.00	0.50

β) Την ικανότητα εξουδετέρωσης των αλάτων:

- 1 βαρέλι θειικού άλατος εξουδετερώνει 3 κιλά αλάτων μολύβδου, 2 κιλά αλάτων υδραργύρου και 20 κιλά αλάτων μαγγανίου.
- 1 βαρέλι νιτρικού άλατος εξουδετερώνει 5 κιλά αλάτων μολύβδου, 12.5 κιλά αλάτων υδραργύρου και 3 κιλά αλάτων μαγγανίου.

γ) Τους οικολογικούς περιορισμούς:

Οι μέγιστες ποσότητες τοξικών ουσιών στα νερά, που επιτρέπει η νομοθεσία μετά την εφαρμογή μέτρων κατά της μόλυνσης, είναι:

- άλας μολύβδου 1 κιλό
- άλας υδραργύρου 0.2 κιλά
- άλας μαγγανίου 1.1 κιλά

Υποτίθεται ότι η φύση καταστρέφει από μόνη της καθημερινά αυτές τις ποσότητες, δεν μπορεί όμως να καταστρέψει περισσότερο.

δ) Το κόστος προϊόντων εξουδετέρωσης

- 1 βαρέλι νιτρικού άλατος κοστίζει 3000 χρηματικές μονάδες (χ.μ)
- 1 βαρέλι νιτρικού άλατος κοστίζει 3000 (χ.μ)

Το πρόβλημα της επιτροπής συνίσταται στην *εναλλακτική επιλογή θειικών ή/ και νιτρικών αλάτων που ελαχιστοποιούν το κόστος προστασίας της λίμνης*.

3. Από μια εταιρεία κατασκευής χαρτιού ζητήθηκε η παραγωγή χαρτιού σε ρολά μήκους 150 cm και πλάτους 1.5, 2.5 και 3.5 cm. Τα μηχανήματα όμως της εταιρεία μπορούν να παράγουν ρολά χαρτιών οποιουδήποτε μήκους αλλά πλάτους αποκλειστικά 10 cm και συνεπώς η εταιρεία πρέπει να κόψει τα παραγόμενα ρολά στις ζητούμενες προδιαγραφές (πλάτους).

Α. Αν οι ελάχιστες απαιτήσεις της αγοράς ανέρχονται σε 1000 ρολά πλάτους 1.5 cm, 2000 ρολά πλάτους 2.5 cm και 4000 ρολά πλάτους 3.5 cm υποδείξτε ένα π.γ.π για την εύρεση του συνολικού αριθμού ρολών χαρτιού που πρέπει να παραχθούν έτσι ώστε οι απώλειες σε χαρτί της εταιρείας να είναι οι ελάχιστες δυνατές.

Β. Τι αλλάζει αν το ενδιαφέρον της εταιρείας επικεντρωθεί μόνο στην εύρεση του ελάχιστου δυνατού συνολικού αριθμού ρολών χάρτου που πρέπει να παραχθεί (κάτω από τις ίδιες απαιτήσεις της αγοράς). Δώστε το νέο π.γ.π.

4. Στα πλαίσια της αναδιαμόρφωσης μεγάλης κεντρικής πλατείας μια πόλης προτείνεται ο εξής σχεδιασμός:

Στην επιφάνεια: η εγκατάσταση γραφείων, διαμερισμάτων, πράσινων χώρων και ενός σιντριβανιού.

Στο υπόγειο: η εγκατάσταση ενός εμπορικού κέντρου (υπεραγορά), ενός κέντρου τήρησης εθνικών αρχείων και η κατασκευή πάρκινγκ.

Τεχνικές προδιαγραφές

1. Η συνολική διαθέσιμη επιφάνεια επί του εδάφους είναι 20000 τετραγωνικά μέτρα
2. Τα πάρκινγκ κατασκευάζονται απαραίτητα σε 5 συνεχόμενα επίπεδα, είναι δηλαδή πεντώροφο.
3. Το εμπορικό κέντρο κατασκευάζεται σε 2 επίπεδα (διώροφο)
4. Δεν είναι δυνατή η κατασκευή πάρκινγκ κάτω από το εμπορικό κέντρο
5. Οι χώροι που προορίζονται για τα αρχεία κατασκευάζονται απαραίτητα σε 10 συνεχόμενα επίπεδα
6. Τίποτε δεν μπορεί να κατασκευαστεί κάτω από το σιντριβάνι
7. Επιβάλλεται η κατασκευή πάρκινγκ κάτω από τα κτίρια που προορίζονται για κατοικίες
8. Τα διαμερίσματα κατασκευάζονται σε 10 ορόφους και στο ισόγειο
9. Τα γραφεία κατασκευάζονται σε 7 ορόφους και στο ισόγειο
10. Ένα κτίριο δεν μπορεί να περιέχει μαζί γραφεία και διαμερίσματα
11. Η επιφάνεια που θα αφιερωθεί για πράσινους χώρους οφείλει να είναι τουλάχιστον διπλάσια από αυτήν που θα χρησιμοποιηθεί για κατασκευή σιντριβανιού
12. Πράσινοι χώροι και σιντριβάνι πρέπει να καλύπτουν τουλάχιστον τη μισή επιφάνεια της πλατείας
13. Τέλος, στον υπόγειο χώρο της πλατείας μπορούν να κατασκευαστούν μέχρι 10 όροφοι

Στον πίνακα που ακολουθεί και σε χωριστές στήλες, δίνονται αριθμητικά στοιχεία που αφορούν τις ελάχιστες απαιτήσεις σε χώρους καθώς και οικονομικά δεδομένα σχετικά με την εκμετάλλευση των χώρων.

Τεχνικο-οικονομικά δεδομένα του προβλήματος			
Είδος χώρου	Απαιτήσεις (m^2)	Κόστος συντήρησης (χρηματικές μονάδες (χ.μ)/ m^2/ μήνα)	Τιμή ενοικίασης (χ.μ/m^2/μήνα)
Διαμερίσματα	10000	100	1000
Γραφεία	5000	150	2600
Πάρκινγκ	3000	20	400
Πράσινοι χώροι	-	230	
Σιντριβάνι	-	200	-
Εμπορικό κέντρο	2000	250	3600
Αρχείο	4000	30	300

Στόχος της Πολιτείας είναι η επίτευξη του βέλτιστου σχεδιασμού με γνώμονα τη μεγιστοποίηση των εσόδων από την εκμετάλλευση των χώρων.

5. Δίνεται το πρόβλημα

$$\max -x_1+3x_2$$
$$\text{π.ε.}$$
$$-x_1+2x_2 \ge 4$$
$$2x_1-2x_2 \le 2$$
$$x_1 \le 3$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

1. Να βρείτε γραφικά τον χώρο των εφικτών λύσεων και τις κορυφές του, σχεδιάζοντας τις ευθείες των περιορισμών
2. Να βρείτε με αλγεβρικό τρόπο το πολύ δυο από τις κορυφές του συνόλου των εφικτών λύσεων του προβλήματος, διατυπώνοντας με προσοχή την διαδικασία που θα ακολουθήσετε. Να πάρετε τις προβολές των κορυφών αυτών στο επίπεδο x_1, x_2 (θα ταυτισθούν με κάποια από τα σημεία που έχετε βρει στο ερώτημα 1). Να εντοπίσετε τα ζεύγη των ευθειών των περιορισμών, που στις τομές τους προκύπτουν οι προβολές, στο επίπεδο x_1, x_2, των

κορυφών που έχετε βρει. Αν στην προσπάθειά σας να βρείτε τις δυο κορυφές με αλγεβρικό τρόπο βρείτε κάποια λύση που **δεν είναι βασική εφικτή**, για αυτή την λύση πάρτε την προβολή της στο επίπεδο x_1, x_2 και στην συνέχεια προσπαθήστε να εντοπίσετε τις δυο ευθείες που ορίζουν αυτό το σημείο ως τομή. Που περιμένετε να τέμνονται αυτές οι ευθείες, Μέσα στο χώρο των εφικτών λύσεων ή έξω από αυτόν. Αντίστροφα από την γραφική παράσταση που θα κάνετε στο ερώτημα 1, να εντοπίσετε δυο ευθείες περιορισμών που τέμνονται σε σημείο έξω από τον χώρο των εφικτών λύσεων. Μετά προσπαθήστε να βρείτε την βασική λύση που η προβολή της στο επίπεδο x_1, x_2 αντιστοιχεί σε αυτό το σημείο. Ελέγξτε τις συντεταγμένες αυτής της βασικής λύσης, θα διαπιστώσετε ότι αυτή η λύση δεν είναι εφικτή. Συσχετίστε την θέση της προβολής με το γεγονός ότι η λύση δεν είναι εφικτή

3. Να βρείτε γραφικά την λύση μεγίστου καθώς και το μέγιστο που ζητείται. Δικαιολογείστε με προσοχή την πορεία με αναφορά στο θετικό και αρνητικό ημιεπίπεδο στο οποίο κάθε ευθεία χωρίζει το επίπεδο
4. Ποιες είναι οι τιμές των μεταβλητών περιθωρίου στη βέλτιστη λύση. Ποιοι περιορισμοί είναι ενεργοί και ποιοι όχι στη βέλτιστη λύση
5. Ποια είναι η λύση και η τιμή της Α.Σ. αν στον περιορισμό (3) θέσουμε 6 αντί 3. (Η απάντηση να δοθεί με γραφική επίλυση)
6. Χρησιμοποιώντας την απάντηση στη ερώτηση (5) να βρείτε, πάλι γραφικά, την αύξηση της Α.Σ. αν το 3 αντικατασταθεί με το 4, 5, 6. Μπορείτε βασιζόμενοι μόνο στην απάντηση σε αυτό το ερώτημα να συμπεράνετε αναλογική αύξηση της τιμής της Α.Σ. σε αυξήσεις του συντελεστή b_3; (Αυτή η αύξηση της Α.Σ. όταν αυξάνεται κατά μια μονάδα ο πόρος b_3 λέγεται δυϊκή τιμή (Dual price) του πόρου 3)

6. Για το πρόβλημα

$$\begin{aligned} &\max Z = 3x_1 + x_2 \\ &\text{s.t.} -x_1 + x_2 \le 1 \\ &x_1 - 2x_2 \ge -4 \\ &x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

Α
1. Να επιλύσετε το πρόβλημα γραφικά
2. Να βρείτε αλγεβρικά το σύνολο των βασικών του λύσεων.
3. Να βρείτε το σύνολο των βασικών του εφικτών λύσεων
4. Υπάρχουν εκφυλισμένες β.ε.λ. σε αυτό το πρόβλημα
5. Ξεκινώντας από την κορυφή (2, 3) του χώρου των εφικτών λύσεων και εφαρμόζοντας την γνωστή σας μέθοδο μετάβασης από κορυφή σε γειτονική κορυφή να βρείτε τις γειτονικές κορυφές. Έχετε τελικά βρει δυο; Αν όχι γιατί. Είναι ο χώρος των εφικτών λύσεων φραγμένος,

Β. Αν η Α.Σ. είναι $\max Z = x_1 - 0.5x_2$

1. Να επιλύσετε γραφικά το πρόβλημα
2. Είναι η λύση μοναδική,
3. Αν όχι να δώσετε, αλγεβρικά, το σύνολο των λύσεων (παραμετρική οικογένεια λύσεων). Συσχετίστε τα αποτέλεσμα (σύνολο λύσεων) με τα αποτελέσματα στο ερώτημα Α.5
4. Να βρείτε τις τιμές των μεταβλητών περιθωρίου που αντιστοιχούν στην βέλτιστη λύση
5. Σχολιάστε την απάντηση στα 2 και 3 σε σχέση με τον χώρο των εφικτών λύσεων, και τη λύση βέλτιστου που προκύπτει

7. Δίνεται το πρόβλημα

$$\begin{aligned} &\max(-x_1 + 2x_2 - 3x_3) \\ &x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 10 \\ &2x_2 - x_3 \le 1 \\ &x_2 + 2x_4 \le 8 \\ &x_i \ge 0, i = 1, 2, 3, 4 \end{aligned}$$

1) Να επιλυθεί το πρόβλημα με τη χρήση της μεθόδου SIMPLEX. 2) Να βρεθεί το δυϊκό του και να λυθεί χρησιμοποιώντας το LINDO. 3) Από τις δυο λύσεις να επαληθευτούν τα γνωστά θεωρήματα (ίδιο βέλτιστο για τα δύο προβλήματα και θεώρημα του συμπληρωματικού περιθωρίου χαλαρότητας). 4) Από τη λύση του πρωτεύοντος και με αναφορά στην γραμμή $z_j - c_j$ να βρεθεί η λύση του δυϊκού. Να βρεθούν τόσο οι μεταβλητές του δυϊκού προβλήματος όσο και οι μεταβλητές περιθωρίου. 5) Να βρεθεί το εύρος μεταβολής του c_1 που αφήνει την λύση που έχετε βρει στην ερώτηση 1 αμετάβλητη. 6) Να πάρετε μια τιμή του c_1 έξω από το διάστημα που βρήκατε, στο ερώτημα 4 παραπάνω και ξεκινώντας από το τελευταίο βέλτιστο ταμπλό του ερωτήματος 1, να βρείτε τη νέα λύση και την τιμή της Α.Σ. 7) Να βρεθεί το πεδίο μεταβολής του b_1 που αφήνει τη βάση της λύσης, στο ερώτημα 1, αμετάβλητη

8. Δίνεται το π.γ.π.

$\max x_1 + 2x_2 + x_3$

$x_1 + x_2 \le 2$

$2x_1 + x_2 - x_3 \ge 1$

$x_1 - x_3 \le 4$

$x_i \ge 0$ i=1, 2, 3

1) Να βρεθεί η άριστη λύση του προβλήματος χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Simplex 2) Έχει το παραπάνω πρόβλημα εναλλακτική άριστη λύση; Αν ναι να βρεθεί

9. Δίνεται το π.γ.π.

$\max x_1 + 2x_2 + x_3$

$x_1 + x_2 \le 2$

$2x_1 + x_2 - x_3 \ge 1$

$x_1 - x_3 \le 4$

$x_i \ge 0$ i=1, 2, 3

1) Να βρεθεί η άριστη λύση του προβλήματος χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Simplex. 2) Έχει το παραπάνω πρόβλημα εναλλακτική άριστη λύση. Αν ναι να βρεθεί. 3) Να γίνει η επαλήθευση των παραπάνω χρησιμοποιώντας το LINDO

10. Μια εταιρεία χρησιμοποιώντας αχλάδια και ροδάκινα παράγει τρία διαφορετικά είδη φρουτοχυμών Α, Β, Γ τα οποία στη συνέχεια διαθέτει στην αγορά. Η διαδικασία της παραγωγής αποτελείται από τρία στάδια της μίξης της κονσερβοποίησης και της συσκευασίας. Στον πίνακα που ακολουθεί δίνονται οι απαιτήσεις κάθε προϊόντος σε παραγωγικούς συντελεστές και η τιμή πώλησης. Επίσης δίνονται οι διαθέσιμες ποσότητες των πόρων που έχει εξασφαλίσει η εταιρεία. Η επιχείρηση αναζητεί το βέλτιστο πλάνο παραγωγής που μεγιστοποιεί τα έσοδα από την πώληση των προϊόντων

	Προϊόν Α	Προϊόν Β	Προϊόν Γ	Διαθέσιμη Ποσότητα Πόρου
Αχλάδια (κιλά)	2	1	1.6	32
Ροδάκινα (κιλά)	1	2	1.6	40
Μίξη (ώρες)	1	2	2	43
Κονσερβοποίηση (ώρες)	1	1	1	60
Συσκευασία (ώρες)	2	1	1	40
Τιμή Πώλησης (χ.μ)	10	6	8	

Να διαμορφωθεί το π.γ.π. που μεγιστοποιεί τα έσοδα της εταιρείας και χρησιμοποιώντας το LINDO να δοθούν απαντήσεις στα επόμενα ερωτήματα.

1. Ποιο είναι το βέλτιστο πλάνο παραγωγής και τα αντίστοιχο έσοδα που θα προκύψουν,
2. Πόση ποσότητα κάθε πόρου χρησιμοποιείται στο βέλτιστο πλάνο παραγωγής,
3. Αν η εταιρεία μπορούσε να βρει και άλλες ποσότητες αχλαδιών θα έπρεπε να προχωρήσει στην αγορά τους; Αν ναι ποιο είναι το μέγιστο ποσό χρημάτων που θα ήταν πρόθυμη να δαπανήσει ανά κιλό,
4. Σε τι ποσό (σε χμ) ανέρχεται η συμβολή καθενός από τους πόρους στα συνολικά έσοδα της επιχείρησης
5. Υποθέστε ότι η εταιρεία μπορεί να προμηθευτεί ένα νέο μηχάνημα το οποίο θα της επιτρέψει να αυξήσει το χρόνο μίξης στις 50 ώρες τι επίδραση θα είχε αυτό στα έσοδα της εταιρείας
6. Μέχρι ποιου ποσού μπορούν να αυξηθούν ή να ελαττωθούν τα έσοδα από την πώληση μιας μονάδας του προϊόντος Α, χωρίς να επηρεαστεί το βέλτιστο πλάνο παραγωγής; Ποια είναι η βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης σε κάθε περίπτωση αντίστοιχα,
7. Πόσο θα μεταβληθούν τα συνολικά έσοδα εάν αυξηθούν τα έσοδα από την πώληση μιας μονάδας του προϊόντος Β από 6 χμ σε 8 χμ,
8. Ποιο είναι το μέγιστο ποσό που θα ήταν πρόθυμη να πληρώσει η εταιρεία για την αγορά μιας επιπλέον ώρας στο στάδιο της μίξης.
9. Αν η διαθέσιμη ποσότητα αχλαδιών ήταν 35 κιλά τι συνέπεια θα είχε αυτό στα έσοδα της εταιρείας,
10. Ποιο προϊόν δεν παράγεται στο βέλτιστο πλάνο παραγωγής. Πόσο πρέπει να είναι τα έσοδα από το προϊόν αυτό ώστε η εταιρεία να πάρει απόφαση να το παράγει.